

**ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ  
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»**

**НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ БІЗНЕСУ ТА СУЧАСНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
ФОРМА НАВЧАННЯ ДЕННА  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА СОЦІАЛЬНОЇ  
ІНФОРМАТИКИ**

**Допускається до захисту**

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ О.О. Ємець  
(підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 р.

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА  
ДО БАКАЛАВРСЬКОЇ РОБОТИ**

**на тему**

**ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТРЕНАЖЕРУ З ТЕМИ «ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ ДЛЯ  
ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ» ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАЛЬНОГО КУРСУ  
«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»**

**зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»**

**Виконавець роботи Орламенко Софія Андріївна**

\_\_\_\_\_ « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 р.  
(підпис)

**Науковий керівник доц., канд. фіз.-мат. наук Чілікіна Тетяна Василівна**

\_\_\_\_\_ « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 р.  
(підпис)

**ПОЛТАВА 2021 р.**

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ ..	3
ВСТУП.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	6
1.1. Змістовна постановка задачі .....	6
2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД.....	8
2.1. Огляд робіт, де розглянуте аналогічне до теми роботи завдання.....	8
2.2. Позитивні аспекти розглянутих робіт.....	10
2.3. Вади розробок розглянутих робіт.....	11
2.4. Необхідність та актуальність теми роботи.....	11
3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА .....	12
3.1. Алгоритмізація задачі за темою роботи.....	12
3.2. Розробка блок-схеми, яка підлягає програмуванню.....	17
3.3. Обґрунтування вибору програмних засобів для реалізації завдання роботи.....	21
4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА .....	22
4.1. Опис процесу програмної реалізації .....	22
4.2. Опис програми.....	26
4.3. Перевірка валідності. Дослідження можливостей програмної реалізації .....	33
4.4. Необхідна користувачу програми інструкція .....	40
ВИСНОВКИ.....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ .....	42
ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ.....	44

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Умовні позначення, символи, скорочення, терміни	Пояснення умовних позначень, символів, скорочень
$f(x), \varphi(x)$	Функція.
$f'(x), \varphi'(x)$	Диференційована функція.
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$	Границя.
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$	Скінченна або нескінченна границя.
<i>Button</i>	Елемент керування, який дозволяє користувачеві натиснути його для виконання дії.
<i>ComboBox</i>	Елемент керування, який використовується для відображення даних в спадному полі зі списком.
<i>Label</i>	Елемент керування, який дає змогу відображати текст або зображення, яке не може бути змінено користувачем.
<i>PictureBox</i>	Елемент керування, який використовується для відображення графіки в форматі точкового малюнка, GIF, JPEG, метафайлу або значка.
<i>RadioButton</i>	Елемент керування, який дає змогу користувачеві отримати набір з двох або більше взаємовиключних варіантів.
<i>TextBox</i>	Елемент керування, який використовується для отримання вхідних даних від користувача або для відображення тексту.

## ВСТУП

*Актуальність даної роботи полягає* в створенні програмного продукту (навчального тренажеру) для дистанційного (самостійного) навчання, з допомогою якого буде можливо обчислити границі за правилом Лопіталя. Правило Лопіталя – дуже потужний метод, що дозволяє швидко і ефективно усунути зазначені невизначеності.

Найголовнішим елементом актуальності даної роботи є відсутність даного навчального тренажеру в навчальних закладах України.

*Метою даної роботи є* програмна реалізація тренажеру з теми «Правило Лопіталя для обчислення границь» дистанційного навчального курсу «Математичний аналіз».

*Завданням даної роботи є* розробка алгоритму та програмна реалізація, на його основі, навчального тренажеру для обчислення границь за правилом Лопіталя, з використанням здобутих навичок у ході вивчення лекцій з дисципліни «Математичний аналіз».

*Об'єктом розробки є* створення навчального тренажеру для дистанційного навчального курсу «Математичний аналіз».

*Предметом розробки є* програмна реалізація навчального тренажеру для обчислення границь за правилом Лопіталя з навчальної дисципліни «Математичний аналіз».

*Методи розробки, що використовуються.* Основою розробки алгоритму є правило Лопіталя для обчислення границь. Для програмної реалізації навчального тренажеру використано середовище візуальної розробки Microsoft Visual Studio в сукупності з об'єктно-орієнтованою мовою програмування C#.

*Новизною даної роботи є* створення нового програмного забезпечення для навчання студентів з теми «Правило Лопіталя для обчислення границь» дистанційного навчального курсу «Математичний аналіз».

*Практичне значення роботи полягає* у використанні навчального тренажеру студентами як в дистанційному, так і в стаціонарному навчанні в ході вивчення теми

«Правило Лопіталя для обчислення границь» з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» в ПУЕТ. Навчальний тренажер впроваджений в дистанційний навчальний курс з дисципліни «Математичний аналіз» в Полтавському університеті економіки та торгівлі.

*Анотація особисто розробленого.* Було реалізовано навчальний тренажер з теми «Правило Лопіталя для обчислення границь» дистанційного навчального курсу «Математичний аналіз». Результат розробки навчального тренажеру були представлені на науковому семінарі «Комп'ютерні науки і прикладна математика» в 2021 році (ПУЕТ).

*Структура пояснювальної записки:* вступ, постановка задачі, інформаційний огляд, теоретична частина, практична частина, висновки, список використаних інформаційних джерел, додатки.

*Обсяг пояснювальної записки:* 78 сторінок, в тому числі основна частина – 43 сторінок, додатки – 35 сторінок, інформаційних джерел – 18 назв, рисунків – 39, з них блок-схем – 3 рисунки.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

### 1.1. Змістовна постановка задачі

Задачею даної роботи є повна програмна реалізація навчального тренажеру, який допоможе вивчити, закріпити та перевірити знання студента з теми «Правило Лопіталя для обчислень границь». Розглянути приклади використання правила Лопіталя для обчислення границь з курсу лекцій навчальної дисципліни «Математичний аналіз».

Для виконання поставленої задачі потрібно провести інформаційний аналіз застосування правила Лопіталя для обчислення границь. Провести пошук ресурсів та тренажерів з теми «Правило Лопіталя для обчислення границь», відшукати та проаналізувати схожі до завдання навчальні тренажери.

Навчальний тренажер має бути розроблений за прикладами обчислення границь за правилом Лопіталя в лекціях дистанційного навчального курсу «Математичний аналіз» [1-8].

Основні вимоги до розробки навчального тренажеру:

- Розробити алгоритм навчального тренажеру для обчислення границь за правилом Лопіталя.
- Скласти блок-схеми, які відповідатимуть розробленому алгоритму.
- Обрати мову програмування та середовище розробки для реалізації навчального тренажеру по розробленому алгоритму.
- Реалізувати навчальний тренажер відповідно на обраній мові та в обраному середовищі.
- Розробити інтерфейс навчального тренажеру, який буде легкий в користуванні.
- Розробити інтерфейс навчального тренажеру, на українській та англійській мові.
- Розробити перевірку (аналіз) обраної/введеної відповіді з інформуванням.

- Перевірити навчальний тренажер на відсутність помилок (в роботі, текстовій частині).
- Забезпечити роботу навчального тренажера на будь-якій операційній платформі.
- Розробити інструкцію роботи з навчальним тренажером.

## 2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД

### 2.1. Огляд робіт, де розглянуте аналогічне до теми роботи завдання

У всесвітній павутині Інтернет існує безліч онлайн ресурсів з допомогою яких можна обчислити границю за правилом Лопітала [9-11]. Всі три розглянуті онлайн ресурси розроблені у вигляді веб-додатку за допомогою мови розмітки HTML та каскадної таблиці стилів CSS на мовах програмування JavaScript або PHP.

Перший ресурс [9] містить пояснення алгоритму обчислення границь за правилом Лопітала з розв'язаним прикладом. Для введення функцій, необхідно використовувати запрограмовані їм назви (рис. 2.1). Ресурс містить відеоінструкцію по використанню та довідку про введення в поля. Всі розрахунки можна зберегти в excel файлі.

The image shows a web-based interface for calculating limits. At the top, there's a label 'лім' (limit). Below it, a small box contains 'x →' followed by '0' and an infinity symbol. To the right, there are two input fields for functions. The first field contains 'ln (cos (x)) + exp (-x)' and the second contains 'sqrt (x ^ 2-1 / 2)'. Each field has a question mark icon to its right. At the bottom left, there is a blue button with the text 'вирішити' (solve).

Рисунок 2.1 – Введення даних для розв'язання прикладу в першому онлайн ресурсі

Другий онлайн ресурс [10] має мінімалізм в дизайні, містить тільки поля для введення функції (рис. 2.2). Головною із функцій є побудова графіків розв'язаного прикладу. Присутні всі назви функцій, які можна використовувати.

Третій інтернет ресурс [11] включає в себе інформацію про правило Лопітала, перелік математичних операторів та функцій для запису. Даний ресурс дає можливість задати точність розрахунків (рис. 2.3). Всі розрахунки можна зберегти собі на комп'ютер чи просто скопіювати. Незвичайним є присутність функції зробити віджет.



Рисунок 2.2 – Введення даних для розв’язання прикладу в другому онлайн ресурсі

Рисунок 2.3 – Поля для введення функцій в третьому онлайн ресурсі

Також під час аналізу були розглянути схожі до завдання роботи, які були розроблені в навчальному закладі в минулих роках [12-18]. Розглянуті роботи студентів: Безменов Е. Г. з дистанційного курсу «Математичний аналіз» [14], Данник О. І. з дистанційного курсу «Теорія програмування» [15], Фесенко Д. І. з дистанційного курсу «Аналіз алгоритмів» [17], Сузанська А. О [18].

Навчальний тренажер Безменов Е. Г. має тему «Розробка програмного забезпечення для тренажера з теми «Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами» з дисципліни «Математичний аналіз» [14]. Студент отримує згенеровані завдання і покроково їх розв’язує. Допуском до наступного етапу є правильна відповідь на попередній. Деякі варіанти відповідей обираються зі списку, деякі вводяться з клавіатури. На весь процес роботи з програмою встановлюється допустимий ліміт помилок. В разі його вичерпання відкривається довідковий матеріал у вигляді лекції. Після її опрацювання студент повертається до роботи з програмою і продовжує виконання завдань.

Навчальний тренажер Данник О. І. має тему «Мови і граматики» дистанційного навчального курсу «Теорія програмування» [15]. Структурно тренажер представляє собою три основні завдання, для вирішення кожного з яких необхідно пройти кілька послідовних кроків. Кожен такий крок оформлено у вигляді запитання з варіантами відповідей. Основною особливістю даного тренажеру є те, що теоретичні відомості, питання та відповіді завантажуються у вікно із зовнішніх файлів.

Навчальний тренажер Фесенко Д. І. має тему «Розробка тренажеру з теми «Аналіз алгоритму сортування злиттям» дисципліни «Аналіз алгоритмів» [17]. При запуску, перед студентом з'являється початковий екран, який містить привітання з користувачем та кнопку, після натискання якої з'являється випадковий приклад. Приклади містять завдання з вибором відповіді із випадкового списку та введення відповіді студентом самостійно.

Навчальний тренажер Сузанська А. О. має тему «Тренажер «Побудова блок-схем алгоритмів розгалуженої структури» [18]. Навчальний тренажер має тестову структуру, студент має можливість бачити умову прикладу на кожному кроці. При кожному хибному виборі, з'являється пояснення до помилки. Після ознайомлення з поясненням користувач продовжує відповідати.

## **2.2. Позитивні аспекти розглянутих робіт**

- Розроблені інтерфейси навчальних тренажерів є зручні та зрозумілі.
- Розроблені перевірки відповідей, якщо відповідь невірна повідомляється про це користувачу та з'являється теоретична інформація з допомогою.
- Для запуску навчальних тренажерів не потрібні потужні комп'ютери та постійне підключення до мережі Інтернет.
- Велике різноманіття завдань на введення відповіді, вибору відповіді.
- Використання різних мов програмування, дає змогу використовувати навчальні тренажери на різних операційних системах.

### **2.3. Вад розробок розглянутих робіт**

- Для того, щоб запустити онлайн ресурси, необхідно мати доступ до інтернету та встановлений заздалегідь браузер [9-11].
- Онлайн ресурси не навчають та не перевіряють знання, а лише допомагають швидко вирішити приклади.
- Онлайн ресурси не всі містять переклад на українську мову.
- Для деяких навчальних тренажерів, необхідно встановлювати додаткове доповнення, яке не можливо завантажити без мережі Інтернет.
- Навчальні тренажери не мають можливості навчатися та перевіряти свої знання іноземним студентам.

### **2.4. Необхідність та актуальність теми роботи**

Розробка навчального тренажеру для обчислення границь за правилом Лопіталя дасть змогу вдосконалити дистанційний навчальний курс «Математичний аналіз». В часи, коли у світі дистанційна освіта є одним із головних аспектів навчання, такі тренажери грають важливу роль у навчанні.

Розробка навчального тренажера з даної теми дасть змогу студентові підготуватися до навчальних занять та екзаменів. Студент зможе побачити свої слабкі сторони та підсилити їх в даній темі.

Навчальний тренажер має безліч переваг, найголовнішими є наступні:

1. Викладений викладачем теоретичний матеріал, можливо пройти ще раз та закріпити свої знання виконуючи різноманітні практичні приклади.
2. Навчальний тренажер дасть підказку студентові в разі його помилки та пояснить, як її вирішити.

### 3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

#### 3.1. Алгоритмізація задачі за темою роботи

Правило Лопіталя є методом обчислення границь, що мають невизначеності  $\frac{0}{0}$  або  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Нехай  $a$  є деяким кінцевим дійсним числом або дорівнює нескінченності.

Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  та  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  та  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то аналогічно  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Правило Лопіталя можна також застосувати до невизначеностей типу  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ . Перші дві невизначеності  $0 \cdot \infty$  та  $\infty - \infty$  можна звести до типу  $\frac{0}{0}$  або  $\frac{\infty}{\infty}$  з допомогою алгебраїчних перетворень. А невизначеності  $0^0, 1^\infty$  та  $\infty^0$  зводяться до типу  $0 \cdot \infty$  з допомогою співвідношення  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ .

Правило Лопіталя справедливо також і для односторонніх границь.

Викладемо алгоритм навчального тренажера. Тренажер розпочинає роботу з відкриття початкового екрану, який містить дві кнопки: «Теорема та алгоритм» та «Практичні задачі».

При натисканні на першу з'являються по одному теоретичному питанню. При виборі відповіді та натисненні на кнопку «Відповісти», відповіді виділяються зеленим, якщо вона вірна, та червоним кольором, якщо невірна з появою пояснення. Після того, як відповідь обрана вірно стає доступною кнопка «Наступне питання».

При натисненні на другу, з'являються практичні задачі, які студент повинен розв'язати. В практичній частині всі завдання містять введення самостійно даних або обрати зі списку. Після введення та вибору студент має змогу побачити

помилки, якщо є хоча б одне невірне, яке виділене червоним, то необхідно виправити на вірне та перейти на наступний крок.

Після обчислення всіх практичних прикладів, студент отримує умови прикладів для самостійного обрахування та закріплення навичок.

На кожному кроці алгоритму студент має змогу з кожного кроку звернутися до теоретичних матеріалів, де представлено як теоретичні відомості, так і схожі розв'язки прикладів.

Далі в тексті правильні відповіді «✓»:

Теорема (правило Лопітала) та алгоритм розкриття невизначеності

*Питання 1.* На якому інтервалі  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані?

- $(a;b), \varphi'(x) = 0$  для всіх  $x \in (a;b)$ ;
- ✓  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$ .

Якщо обрано першу відповідь, то отримує повідомлення: «На інтервалі  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані».

*Питання 2.* Яке з наступних тверджень є вірним?

- ✓  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi'(x) = 0$ .

Якщо студент обрав другу відповідь, то отримує повідомлення: «Правильним твердженням є  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ».

*Питання 3.* Якщо існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$  та існує

границя  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ , тоді має місце рівності наступного вигляду:

- ✓  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ .

Якщо обрано другу відповідь, з'являється пояснення: «Існує рівність

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \text{ »}.$$

*Питання 4.* Нехай для обчислення границі  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  треба розкрити невизначеність  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  та при цьому виконано всі умови теореми (правило Лопітала). Тоді для обчислення границі знаходимо ...

- похідну функції в знаменнику дробу, а потім розглядаємо  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ ;

✓ окремо похідні функції в чисельнику та похідну функції в знаменнику дробу, а потім розглядаємо  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ .

Якщо обрано першу відповідь, студент отримує повідомлення: «Тоді для обчислення границі знаходимо окремо похідні функції в чисельнику та похідні функції в знаменнику дробу, а потім розглядаємо  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$  ».

*Питання 5.* Якщо невизначеність не виникає, то ...

- застосовуємо правило ще раз (якщо умови теореми виконано знов);

✓ обчислюємо границю.

Якщо студент обрав першу відповідь, з'являється підказка наступного вигляду: «Якщо невизначеність не виникає, то обчислюємо границю».

*Питання 6.* Якщо знов отримали невизначеність  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ , то ...

✓ застосовуємо правило ще раз (якщо умови теореми виконано знов)»

- обчислюємо границю.

Якщо обрано другу відповідь, то з'являється пояснення: «то застосовуємо правило ще раз (якщо умови теореми виконано знов)».

### Практичні завдання

*Приклад 1.* Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{(? )'}{(? )'} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?}{?} = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

*Приклад 2.* Оберіть відповідь із випадуючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?x^? - ?x + ?}{?x^? - ?} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?x - ?}{?x} = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{1}{3}.$

*Приклад 3.* Оберіть відповідь із випадуючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?}{\frac{?}{?+?}} = \lim_{x \rightarrow ?} (?+?) = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty.$

*Приклад 4.* Введіть відповідь. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}.$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?}{?} = ? \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?}{?} = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = 3 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 9.$

Приклад 5. Введіть відповідь. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?}{?} = ? \lim_{x \rightarrow ?} ? = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^4}{3x^2} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 15$ .

Приклад 6. Оберіть відповідь із випадуючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sin x \cos x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{? + ?}{? - ?} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{? + ?}{?} = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x \cos x - \sin x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos 2x} = 2$ .

Приклад 7. Оберіть відповідь із випадуючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{? - \frac{?}{? + x?}}{? x^?} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{x^?}{? x^? (? + x^?)} = \frac{?}{?}$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1 + x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1 + x^2)} = \frac{1}{3}$ .

Приклад 8. Оберіть відповідь із випадуючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow ?} \frac{\frac{?}{?}}{\frac{1}{? \sqrt{?}}} = ? \lim_{x \rightarrow ?} \frac{\sqrt{?}}{?} = 2 \lim_{x \rightarrow ?} \frac{?}{\sqrt{?}} = ?$$

Якщо студент ввів невірні дані, то з'являється підказка з тієї частини, де

невірно  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

### 3.2. Розробка блок-схеми, яка підлягає програмуванню

На рисунках 3.1–3.3 зображені блок-схеми алгоритму навчального тренажера з теми «Правило Лопіталя для обчислення границь».

На рис. 3.1 зображена блок-схема роботи всього навчального тренажера. Після того, як навчальний тренажер запусився, з'являється початкове вікно, з кнопками «Теорема та алгоритм» та «Практичні завдання». Після натиснення на кнопку «Теорема та алгоритм» з'являються питання, блок-схема даного розділу продемонстрована на рис. 3.2. При натисканні на другу кнопку з'являються завдання, блок-схема даного розділу показана на рис. 3.3.

На рис. 3.2 зображена блок-схема теоретичних питань з вибором однієї правильної відповіді. Після вибору відповіді та натисненні на кнопку «Відповісти», відбувається перевірка. Якщо відповідь вірна, то поява кнопки «Наступне питання» при натисненні на яку відбувається перехід до наступного кроку, якщо ні, з'являється повідомлення з підказкою.

На рис. 3.3 зображена блок-схема питання з введенням відповіді та вибором із випадального списку. Після введення або вибору відповіді із списку та натисненні на кнопку «Відповісти» відбувається перевірка, якщо відповідь вірна – з'являється кнопка «Наступне завдання» та відбувається перехід до наступного завдання, якщо ні – з'являється підказка з правильним розв'язком.

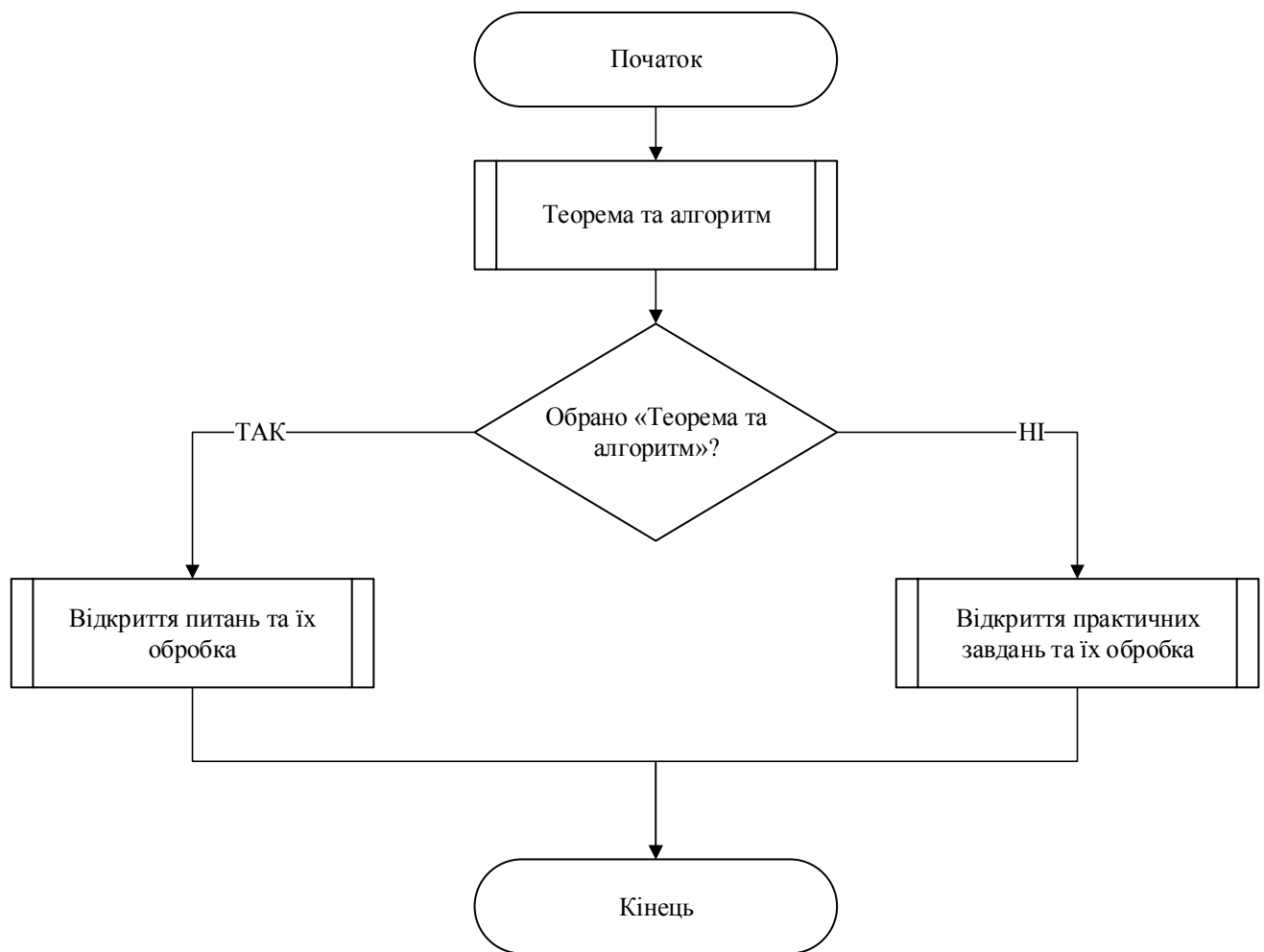


Рисунок 3.1 – Блок-схема навчального тренажера

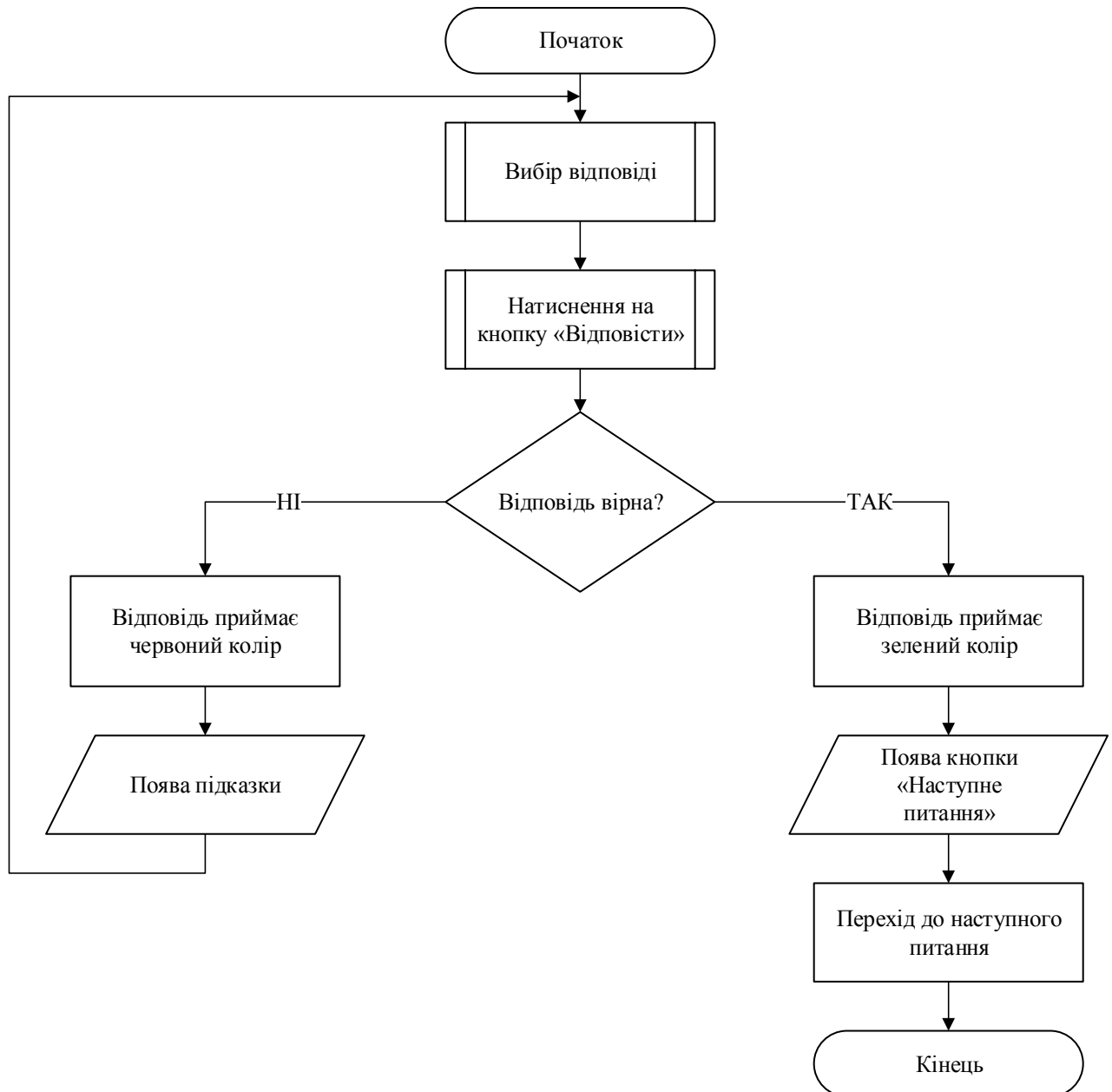


Рисунок 3.2 – Блок-схема питання з вибором однієї правильної відповіді

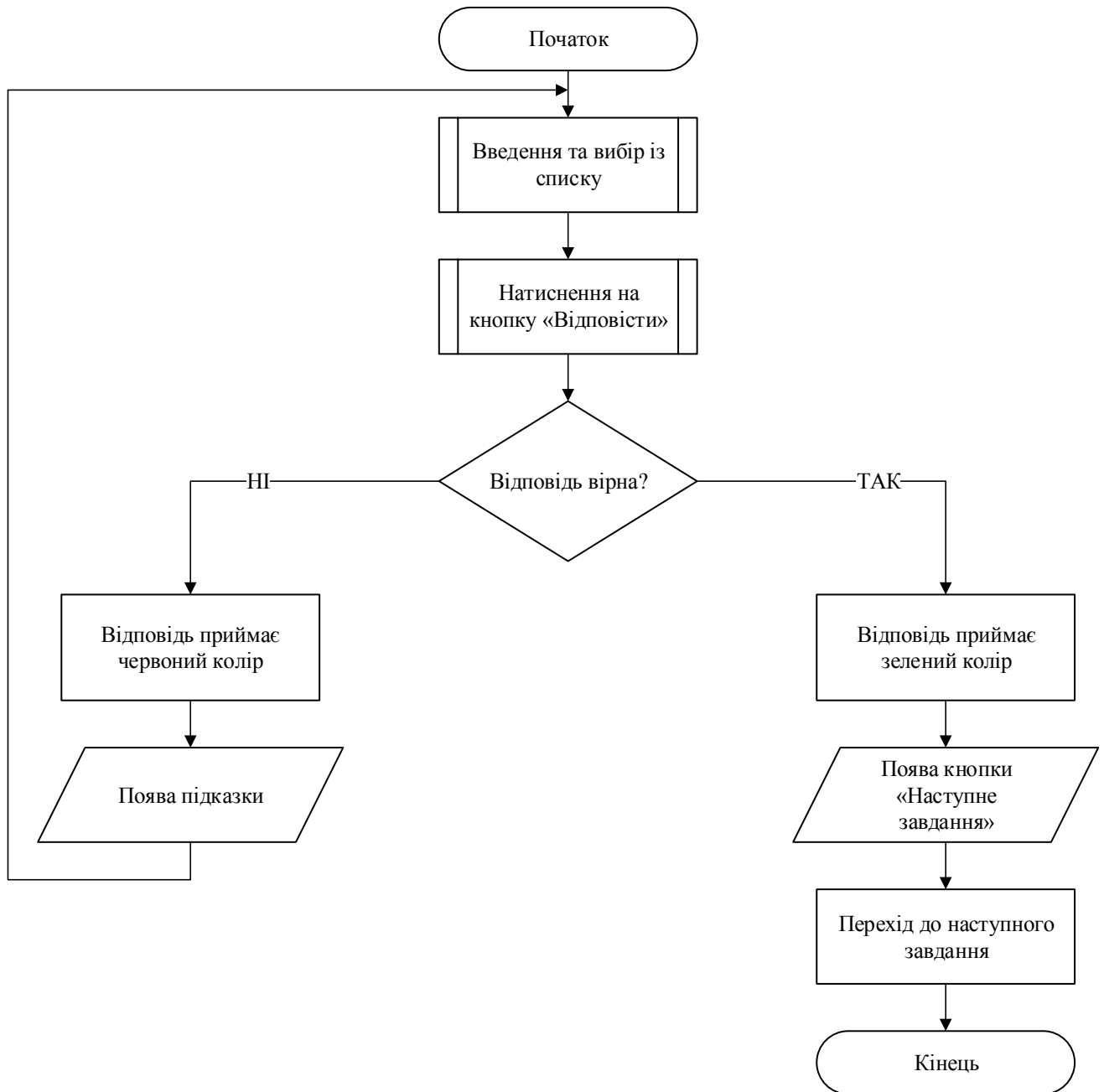


Рисунок 3.3 – Блок-схема завдань із ведення та вибором із списку відповідей

### **3.3.Обґрунтування вибору програмних засобів для реалізації завдання роботи**

Для розробки навчального тренажера в даній роботі було використано об'єктно-орієнтовану мову програмування C# та середовище візуальної розробки Microsoft Visual Studio.

Мова програмування C# – це подієво-керована, повністю об'єктно-орієнтована мова візуального програмування, в якій програми створюються за допомогою інтегрованого середовища розробки (Integrated Development Environment, IDE). У цьому середовищі можна писати, запускати, тестувати і налагоджувати програми.

C# призначена для створення переносимого коду. Всі змінні автоматично ініціалізуються середовищем і мають типову захищеність, що дозволяє уникнути невизначених ситуацій у разі відсутності ініціалізації, зміни в об'єкти або спроби виконати недопустиме перетворення типів.

Microsoft Visual Studio – це інтегроване середовище розробки (IDE) від Microsoft. Він використовується для розробки комп'ютерних програм, а також веб-сайтів, веб-програм, веб-сервісів та мобільних додатків. Microsoft Visual Studio використовує платформи для розробки програмного забезпечення Windows, такі як Windows API, Windows Forms, Windows Presentation Foundation, Windows Store та Windows Silverlight. Він може створювати як власний код, так і керований код.

## 4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

### 4.1. Опис процесу програмної реалізації

При реалізації навчального тренажера було використано об'єктно-орієнтовану мову програмування C# та середовище візуальної розробки Microsoft Visual Studio 2019.

Реалізацію розпочато зі створення проекту в середовищі розробки «Windows Forms App (.NET Core)», рис. 4.1.

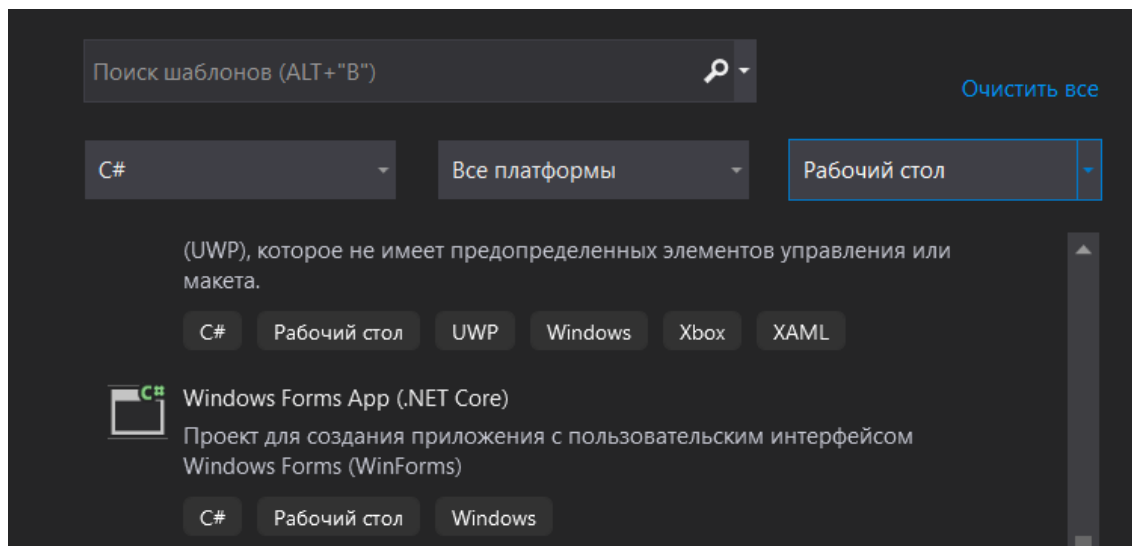


Рисунок 4.1 – Створення проекту

Після створення проекту до нього додавалися форми «Windows Forms», до кожної з якої додано елементи: Label, Button, PictureBox, RadioButton. Поява різних елементів у створеному вікні тренажера залежить від кроку алгоритму.

Для реалізації перевірки відповіді, було використано умовний оператор «if» (рис. 4.2-4.4). З його допомогою проводять перевірки на обрану відповідь, на введену відповідь та обрану відповідь з випадаючого списку.

```

if (radioButton2.Checked)
{
    radioButton2.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    radioButton1.Enabled = false;
    button1.Visible = false;
    button2.Visible = true;
}
else if (radioButton1.Checked)
{
    radioButton1.BackColor = System.Drawing.Color.Red;
    radioButton1.Enabled = false;
    pictureBox2.Visible = true;
}

```

Рисунок 4.2 – Перевірка обраної відповіді

```

else if(textBox1.Text == "0" && textBox2.Text == "sinx" && textBox3.Text == "x" &&
    textBox4.Text == "1" && textBox5.Text == "cosx" && textBox6.Text == "0" &&
    textBox8.Text == "1")
{
    textBox1.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    textBox2.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    textBox3.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    textBox4.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    textBox5.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    textBox6.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    textBox8.BackColor = System.Drawing.Color.Green;

    textBox1.Enabled = false;
    textBox2.Enabled = false;
    textBox3.Enabled = false;
    textBox4.Enabled = false;
    textBox5.Enabled = false;
    textBox6.Enabled = false;
    textBox8.Enabled = false;

    button1.Visible = false;
    button2.Visible = true;
}

```

Рисунок 4.3 – Перевірка введеної відповіді

В разі неправильної обраної відповіді, з'являється підказка. В разі обраної зі списку або введеної відповідь, яка являється невірною, то підказка з'являється лише тієї частини, де помилка. На рис. 4.5 продемонстровано підказку при невірній обраній відповіді, а на рис. 4.6 – підказка невірної частини.

Якщо користувач не вів або не обрав відповідь, отримує повідомлення про це (рис. 4.7).

```

else if (comboBox1.SelectedIndex == 3 && comboBox2.SelectedIndex == 3 &&
comboBox3.SelectedIndex == 3 && comboBox4.SelectedIndex == 4 &&
comboBox5.SelectedIndex == 2 && comboBox6.SelectedIndex == 5 &&
comboBox7.SelectedIndex == 3 && comboBox8.SelectedIndex == 3 &&
comboBox9.SelectedIndex == 5 && comboBox10.SelectedIndex == 3 &&
comboBox11.SelectedIndex == 2 && comboBox12.SelectedIndex == 3 &&
comboBox13.SelectedIndex == 3 && comboBox14.SelectedIndex == 3)
{
    comboBox1.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox2.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox3.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox4.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox5.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox6.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox7.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox8.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox9.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox10.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox11.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox12.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox13.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
    comboBox14.BackColor = System.Drawing.Color.Green;
}

```

Рисунок 4.4 – Перевірка обраної відповіді з випадуючого списку

```

else if (radioButton1.Checked)
{
    radioButton1.BackColor = System.Drawing.Color.Red;
    radioButton1.Enabled = false;
    pictureBox2.Visible = true;
}

```

Рисунок 4.5 – Підказка при невірній обраній відповіді

```

if(textBox1.Text != "0" || textBox2.Text != "sinx" || textBox3.Text != "x")
{
    pictureBox3.Visible = true;
    pictureBox3.Image = Properties.Resources.pod_1_1;
}
else if(textBox4.Text != "1" || textBox5.Text != "cosx" || textBox6.Text != "0")
{
    pictureBox3.Visible = true;
    pictureBox3.Image = Properties.Resources.pod_1_2;
}
else if(textBox8.Text != "1")
{
    pictureBox3.Visible = true;
    pictureBox3.Image = Properties.Resources.pod_1_3;
}

```

Рисунок 4.6 – Підказка при невірній одній частині



```

if(textBox1.Text == "" || textBox2.Text == "" || textBox3.Text == "" ||
   textBox4.Text == "" || textBox5.Text == "" || textBox6.Text == "" ||
   textBox8.Text == "")
{
    button2.Visible = false;
    pictureBox3.Visible = false;
    MessageBox.Show("Введіть відповідь в порожнє поле.", "Увага!",
        MessageBoxButtons.OK,
        MessageBoxIcon.Exclamation,
        MessageBoxDefaultButton.Button1);
}

```

Рисунок 4.7 – Підказка при не веденій відповіді

На кожному кроці алгоритму навчального тренажера, можливий доступ до короткого теоретичного матеріалу. Рисунок 4.8 демонструє програмний код при натисненні на елемент керування «Теоретичний матеріал» з будь-якого кроку.

```

private void button3_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Teor tr = new Teor();
    tr.Show();
}

```

Рисунок 4.8 – Перехід до теоретичного матеріалу

Перехід до наступного питання або повернення до початку, відбувається з допомогою відкриття новою форми та закриття старою (рис. 4.9).

```

private void button2_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Prak_2 pr_2 = new Prak_2();
    pr_2.Show();
    Hide();
}

```

Рисунок 4.9 – Перехід до наступної форми

## 4.2. Опис програми

Після завантаження та запуску навчального тренажера, перед користувачем з'являється початкове вікно програми. Вікно має інформацію про виконавця та наукового керівника, тема роботи та два елементи для переходу до завдань (рис. 4.10).

■ Правило Лопіталя для знаходження границь

— □ ×

### ***Правило Лопіталя для знаходження границь***

Теорема та  
алгоритм

Практичні  
завдання

*Виконала студентка групи КН б інт-21 Орламенко С. А.  
Науковий керівник: доц., канд. фіз.-мат. наук Чілікіна Т. В.*

Рисунок 4.10 – Початковий екран навчального тренажера

Після натиснення користувачем на кнопку «Теорема та алгоритм» з'являється наступне вікно з першим теоретичним питанням (усього 6 теоретичних питань) з вибором однієї правильної відповіді (рис. 4.11). Для того щоб відповісти на дане питання, користувачеві, необхідно обрати одну з відповідей. Після вибору та натисненні на кнопку «Відповісти», якщо відповідь вірна – з'являється доступна кнопка «Наступне питання» та відповідь приймає зелений колір, а інша стає недоступна для повторного вибору. Якщо відповідь обрана невірна, то студент отримує підказку (рис. 4.12) та має можливість відповісти знову.

При натисненні користувачем на кнопку «Практичні завдання» з'являється наступне вікно з першим прикладом (усього 8 практичних завдань) з введенням відповіді (рис. 4.13) та з вибором відповіді із випадаючого меню (рис. 4.14). Для того щоб виконати дані завдання, користувачеві, необхідно ввести в порожні клітинки або обрати із списку, необхідні дані. Після введення або вибору відповіді та натисненні на кнопку «Відповісти», якщо відповідь вірна – з'являється доступна кнопка «Наступне питання» та відповідь приймає зелений колір.

■ Правило Лопіталя для знаходження границь

— □ ×

*Питання 1.* На якому інтервалі  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані

☐  $(a;b), \varphi'(x) = 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

☐  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.11 – Теоретичне питання навчального тренажера

Якщо відповідь невірна, то студент отримує підказку (рис. 4.15 та 4.16) та має можливість відповісти знову. Підказки мають поділ, якщо помилка в першій частині прикладу, то підказка лише по цій частині, якщо в другій, то відповідно з другою частиною підказка, так далі.

Після закінчення виконання практичних прикладів, користувач отримує умови прикладів для самостійного розв'язання (рис. 4.17).

Питання 1. На якому інтервалі  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані

☒  $(a;b), \varphi'(x) = 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

☐  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

На інтервалі  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$   
диференційовані

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.12 – Підказка в теоретичному питанні

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \boxed{\phantom{0}}} \frac{(\boxed{\phantom{0}})' }{(\boxed{\phantom{0}})' } = \lim_{x \rightarrow \boxed{\phantom{0}}} \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = \boxed{\phantom{0}}$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.13 – Практичне завдання з веденням відповіді

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадаючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow \downarrow} \frac{\downarrow \downarrow \downarrow}{\downarrow \downarrow} = \lim_{x \rightarrow \downarrow} \frac{\downarrow \downarrow}{\downarrow} = \downarrow$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.14 – Практичне завдання з вибором відповіді із випадаючого меню

Після виконання всіх теоретичних запитань та практичних завдань, з'являється вікно з повідомленням про закінчення. Вікно також містить дві кнопки «Повернутися до початку» та «Вихід» (рисунок 4.18 та 4.19).

З кожного кроку будь-якої частини навчального тренажера, можна отримати теоретичний матеріал, натиснувши на кнопку «Теоретичний матеріал» в нижній лівій частині кожного завдання. Теоретичний матеріал містить теоретичні відомості та декілька розв'язаних прикладів (рис. 4.20).

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1}$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.15 – Підказка при невірній відповіді при введенні

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадаючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12}$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.16 – Підказка при невірній відповіді із випадаючого меню

### ***Приклади для самостійного розв'язку***

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x}{x^3 + 10x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10 + 9}{x^5 - 5x + 4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{5x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1 + 2x)}$$

Продовжити

Рисунок 4.17 – Приклади для самостійного розв'язку

***Ви успішно пройшли навчальне тестування  
по темі "Теорема та алгоритм Лопітала"***

Повернутися до  
початку

Вихід

Рисунок 4.18 – Кінцева форма після теоретичних питань

***Ви успішно розв'язали навчальні завдання  
по темі "Правило Лопітала для обчислення границь"***

Повернутися до  
початку

Вихід

Рисунок 4.19 – Кінцева форма після практичних завдань

### ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

**Теорема:** Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих функцій рівна границі відношення їх похідних, якщо такі існують

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

І не важливо, до якого значення прямує аргумент, головне отримати одну з вказаних особливостей. Якщо після однократного використання правила Лопітала знову отримаємо особливість виду  $0/0$  або  $\infty/\infty$ , то правило необхідно застосувати повторно, і так аж до того часу, доки не позбудемося особливості.

#### Приклади:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x)'}{5x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 \ln x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{3 \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a}{1} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x^3 - x^5}{4x - x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x) + x^3 - x^5)'}{(4x - x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x^2 - 5x^4}{4 - 4x^3} = \frac{1 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{1}{4}$$

Рисунок 4.20 – Теоретичний матеріал



### 4.3.Перевірка валідності (тестування всіх процедур). Дослідження можливостей програмної реалізації

Після того, як закінчилась програмна реалізація навчального тренажера, було проведено тестування всіх етапів проходження. На кожному кроці були протестовані всі можливі варіанти відповідей та розроблені виключні ситуації.

Після запуску навчального тренажера було протестовані дві основні кнопки на перехід до завдань, а саме: «Теорема та алгоритм» та «Практичні завдання».

На наступному кроці були протестовані всі варіанти відповідей з блоку питань «Теорема та алгоритм». (рис. 4.21-4.23). Аналогічним чином були протестовані всі наступні питання з даного блоку.

■ Правило Лопітала для знаходження границь

— □ ×

*Питання 1.* На якому інтервалі  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані

○  $(a;b), \varphi$  )

○  $(a;b), \varphi$  )

Увага!

Оберіть відповідь.

ОК

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.21 – Перевірка першого теоретичного питання

Питання 1. На якому інтервалі  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані

☒  $(a;b), \varphi'(x) = 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

☐  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

На інтервалі  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$   
диференційовані

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.22 – Перевірка першого теоретичного питання

Питання 1. На якому інтервалі  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  диференційовані

☒  $(a;b), \varphi'(x) = 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

☐  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$

На інтервалі  $(a;b), \varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$   
диференційовані

Теоретичний матеріал

Наступне питання

Рисунок 4.23 – Перевірка першого теоретичного питання

Далі було протестований блок «Практичні завдання», перший приклад розв'язується з допомогою введення відповіді в порожні клітини. Протестовані всі

варіанти підказок та введення даних (рис. 4.24-4.28). Відповідно до цього тестування було перевірені 4 та 5 завдання.

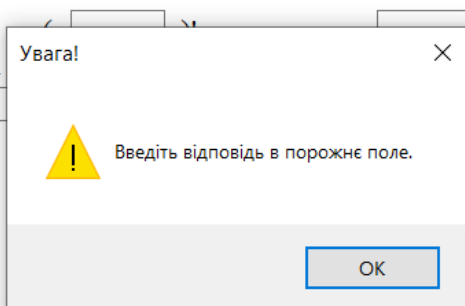
Правило Лопітала для знаходження границь

— □ ×

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$\lim_{x \rightarrow$



$=$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.24 – Перевірка практичного завдання з веденням відповіді

Правило Лопітала для знаходження границь

— □ ×

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'}$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.25 – Перевірка практичного завдання з веденням відповіді

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1}$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.26 – Перевірка практичного завдання з веденням відповіді

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.27 – Перевірка практичного завдання з веденням відповіді

Приклад 1. Введіть відповідь. Перевірити, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Теоретичний матеріал

Наступне завдання

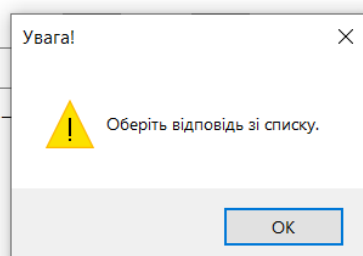
Рисунок 4.28 – Перевірка практичного завдання з веденням відповіді

Наступним кроком були протестовані приклади, що розв'язується з допомогою обрання відповіді зі списку. Протестовані всі варіанти підказок та обрання даних (рис. 4.29-4.33). Відповідно до цього тестування було перевірені 3, 6, 7 та 8 завдання.

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадаючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow \downarrow} \frac{\downarrow}{\downarrow} = \downarrow$$



Теоретичний матеріал

Відповісти

Рисунок 4.29 – Перевірка прикладу з вибором відповіді зі списку

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадального списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{6x} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{6x} = \frac{1}{2}$

Теоретичний матеріал

Відповідь

Рисунок 4.30 – Перевірка прикладу з вибором відповіді зі списку

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадального списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{1}{2}$

Теоретичний матеріал

Відповідь

Рисунок 4.31 – Перевірка прикладу з вибором відповіді зі списку

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадаючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{1}{2}$$

Теоретичний матеріал

Відповідь

Рисунок 4.32 – Перевірка прикладу з вибором відповіді зі списку

Приклад 2. Оберіть відповідь із випадаючого списку. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{1}{3}$$

Теоретичний матеріал

Наступне завдання

Рисунок 4.33 – Перевірка прикладу з вибором відповіді зі списку

Перевірено відкриття теоретичного матеріалу з кожного кроку навчального тренажера.

Після завершення проходження навчального тренажера, з'являється завершальне вікно, де були протестовані кнопки переходу «Повернутися до початку» та «Вихід».

#### **4.4. Необхідна користувачу програми інструкція**

Для запуску тренажера, необхідно з дистанційного курсу «Математичний аналіз» скачати «\*.exe» файл. Можливо треба буде встановити додаткове доповнення .NET Framework версії 4.0 або вище.

Після запуску навчальний тренажер готовий до використання.

Студент сам обирає спочатку пройти «Теорема та алгоритм» чи перейти відразу до «Практичних завдань». Відповідні завдання з'являються перед користувачем.

Після проходження одного з блоків, можна перейти до іншого повернувшись до початкового вікна.



## ВИСНОВКИ

Під час виконання дипломної роботи реалізовано навчальний тренажер, який допоможе вивчити студентом тему «Правило Лопіталя для обчислень границь» в навчальному курсі «Математичний аналіз».

Алгоритм навчального тренажера розроблений за прикладами обчислення границь за правилом Лопіталя в лекціях дистанційного навчального курсу «Математичний аналіз».

Виконанні основні вимоги до розробки навчального тренажера, а саме:

1. Розроблено алгоритм навчального тренажера для обчислень границь за правилом Лопіталя.
2. Складено блок-схеми, які відповідають розробленому алгоритму.
3. Обрано мову програмування та середовище розробки для реалізації навчального тренажера.
4. Реалізований навчальний тренажер відповідно на обраній мові та в обраному середовищі.
5. Розроблено інтерфейс навчального тренажера, який легкий в користуванні.
6. Розроблено інтерфейс навчального тренажера на українській та англійській мові.
7. Розроблено перевірку (аналіз) обраної/введеної відповіді з інформуванням.
8. Перевірено навчальний тренажер на відсутність помилок.
9. Забезпечено роботу навчального тренажера на будь-якій операційній системі.
10. Розроблено інструкцію роботи з навчальним тренажером.

Створений навчальний тренажер впроваджено в дистанційне навчання Полтавського університету економіки та торгівлі в дистанційний навчальний курс «Математичний аналіз» для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки».

Результат розробки навчального тренажера були представлені на науковому семінарі «Комп'ютерні науки і прикладна математика» в 2021 році.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. / В. А. Зорич // М.: Наука – 1981. – 543 с.
2. Рудин У. Основы математического анализа. / У. Рудин // М.: Мир – 1966. – 319 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц // М.: Наука – 1966. – 607 с.
4. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1984 – 592 с.
5. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. / Г. И. Запорожец // М.: Высшая школа – 1966. – 460 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г. Н. Берман // М.: Наука – 1984. – 416 с.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9-е вид. / Б. П. Демидович // М.: Наука – 1977. – 527 с.
8. Гунтер Н. М. Сборник задач по высшей математике / Н. М. Гунтер, Р. О. Кузьмин. // М. Гостехиздат – 1949. – 244 с.
9. Правило Лопиталья онлайн [Электронный ресурс]: Math Semester. – Режим доступа: <https://math.semestr.ru/math/lopital.php>
10. Правило Лопиталья калькулятор онлайн [Электронный ресурс]: Контрольная Работа РУ. – Режим доступа: <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/predel/lopital/>
11. Онлайн калькулятор: Нахождение предела функции в точке по правилу Лопиталья [Электронный ресурс]: PLANETCALC. – Режим доступа: <https://planetcalc.ru/1036/>
12. Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2018): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 1 / за ред. Ємця О. О. – Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2018. – 64 с. – Режим доступа: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/6563>

13. Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2018): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 2 / за ред. Ємця О. О. – Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2018. – 27 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/6987>

14. Безменов Е. Г. Розробка програмного забезпечення для тренажера з теми «Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами» з дисципліни «Математичний аналіз» / Е. Г. Безменов, Т. В. Чілікіна // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2018): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 2.– Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2018. – С. 25-26

15. Данник О. І. Навчальний тренажер з теми «Мови і граматики» та його програмна реалізація / О. І. Данник, О. О. Черненко // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2018): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 2.– Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2018. – С. 4-5

16. Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2020): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 5 / за ред. Ємця О. О. – Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2020. – 63 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/8939>

17. Фесенко Д. І. Розробка тренажера з теми «Аналіз алгоритму сортування злиттям» дисципліни «Аналіз алгоритмів» / Д. І. Фесенко, Ю. Ф. Олексійчук // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2020): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 5 / за ред. Ємця О. О. – Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2020. – С. 29-32

18. Сузанська А. О. Тренажер «Побудова блок-схем алгоритмів розгалуженої структури» / А. О. Сузанська, Є. М. Ємець, О. О. Ємець // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2020): матеріали науково-практичного семінару. Випуск 5 / за ред. Ємця О. О. – Полтава: Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2020. – С. 56-62